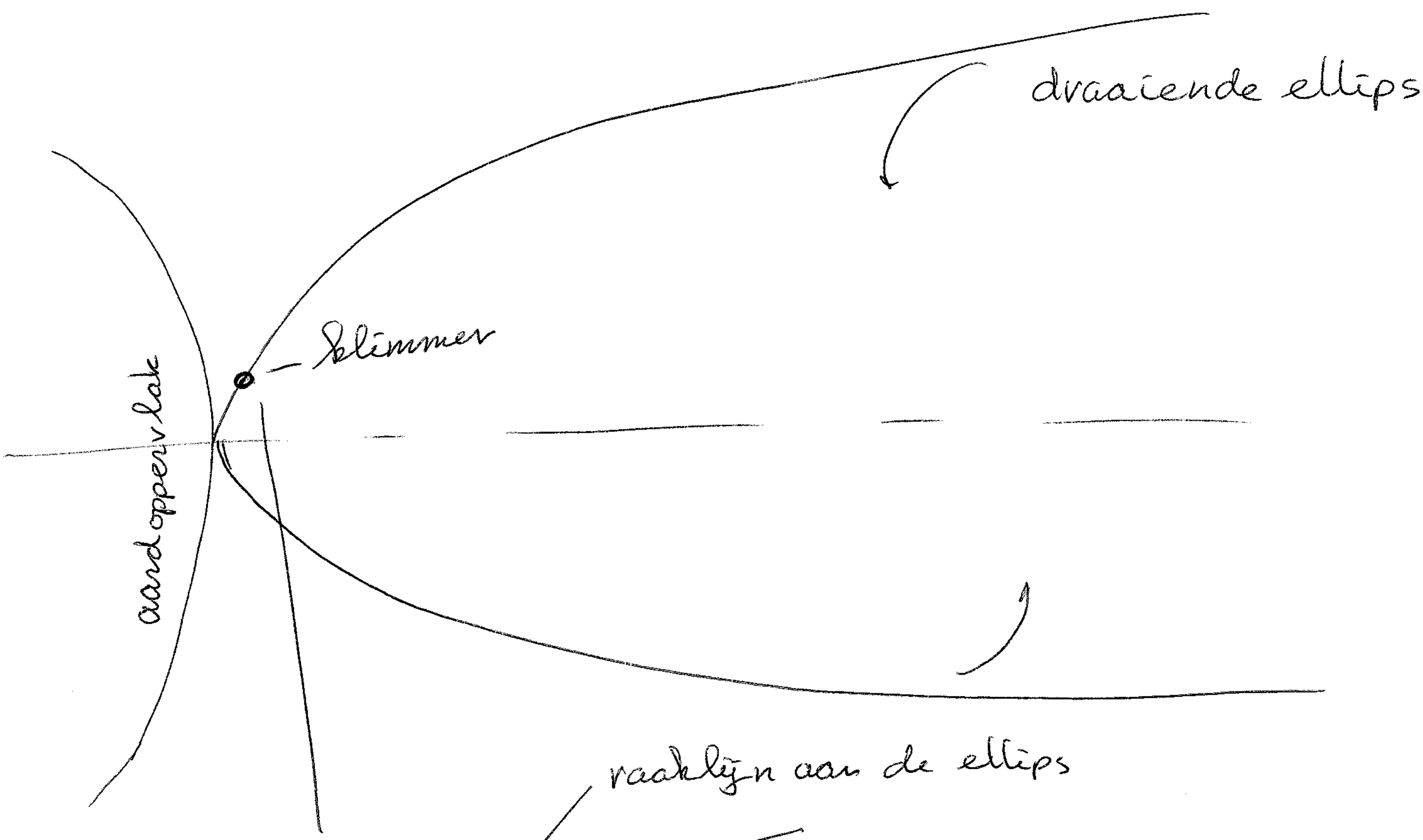
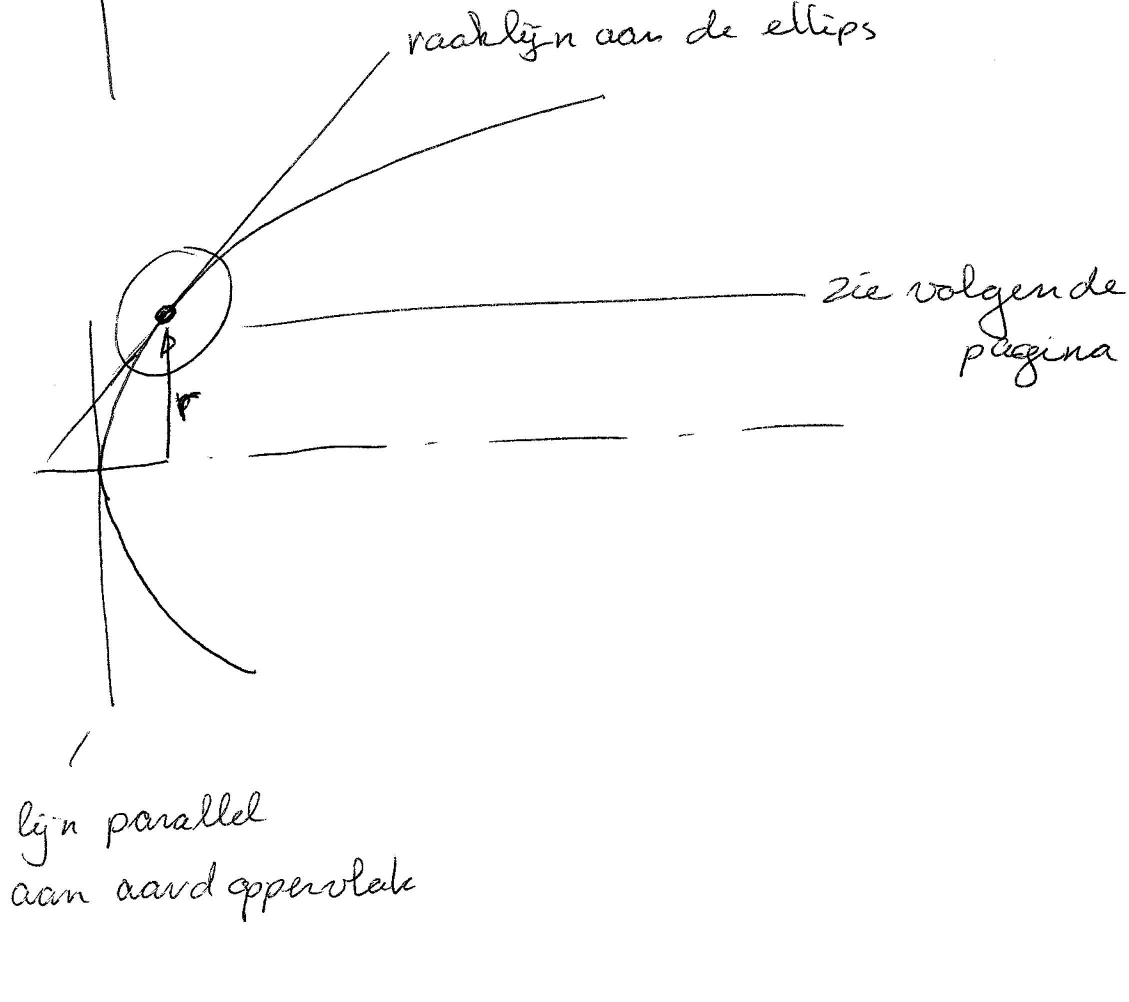
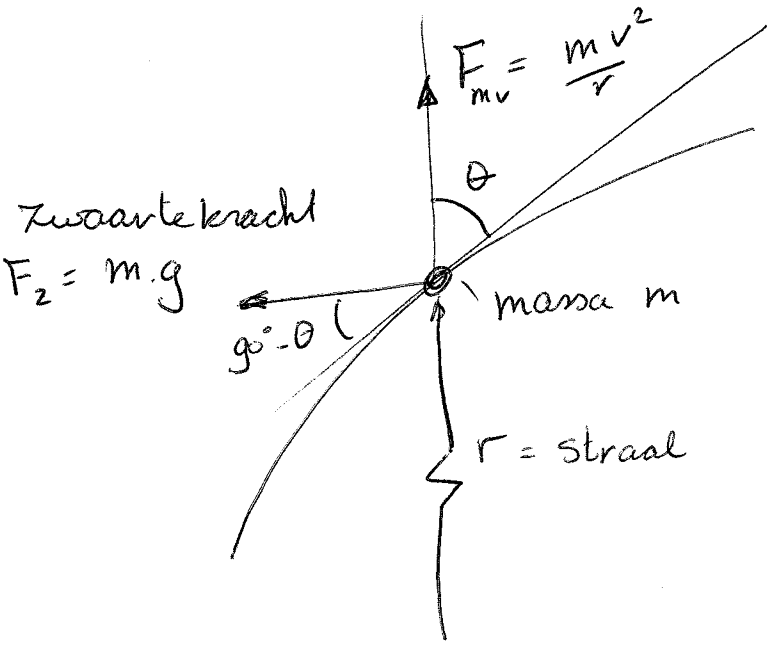
Krachten beeld langs de kabel



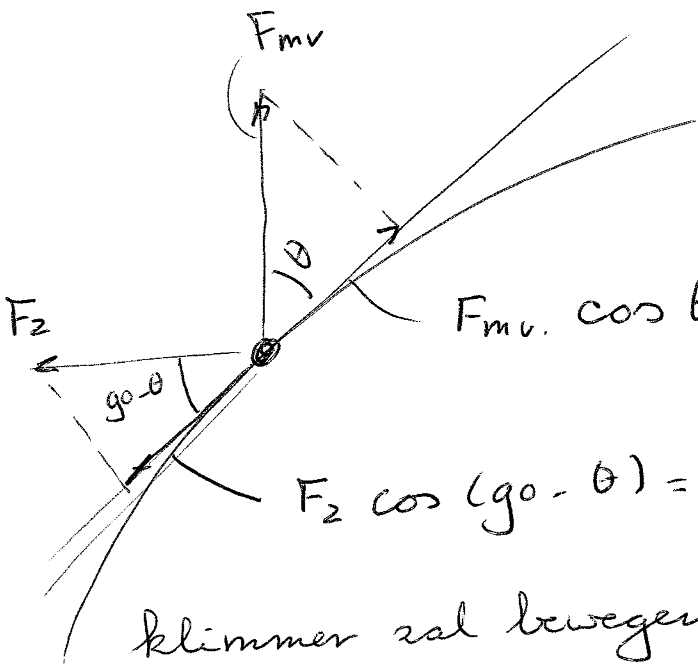




middelpuntvliedende kracht $F_{mv} = \frac{mv^2}{r} = m\Omega^2 r$

zwaartekracht $F_z = m.g$

Ontbinden van de krachten in een richting parallel aan de kabel



$F_{mv}.\cos\theta = m\Omega^2 r\cos\theta = F_{up}$

$F_z\cos(90-\theta) = m.g.\cos(90-\theta) = F_{down}$

klimmer zal bewegen als $F_{up} > F_{down}$

dus $\cancel{m}\Omega^2 r\cos\theta > \cancel{m}g\cos(90°-\theta)$

$\Rightarrow \Omega^2 r\cos\theta > g\cos(90°-\theta)$

voorbeeld op volgende pagina

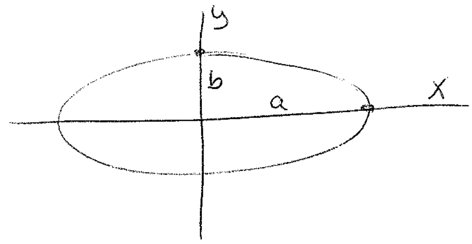
Voorbeeld

Stel: rotatie snelheid ellips éénmaal per 10 min $\Rightarrow \Omega = 0{,}0105$ rad/s
kleine uitwijking uit de midden stand
neem aan een ellips met afmetingen zoals
aangegeven in het plaatje $\Rightarrow$ lange as 6.5 aardstralen
korte as 1 aardstraal

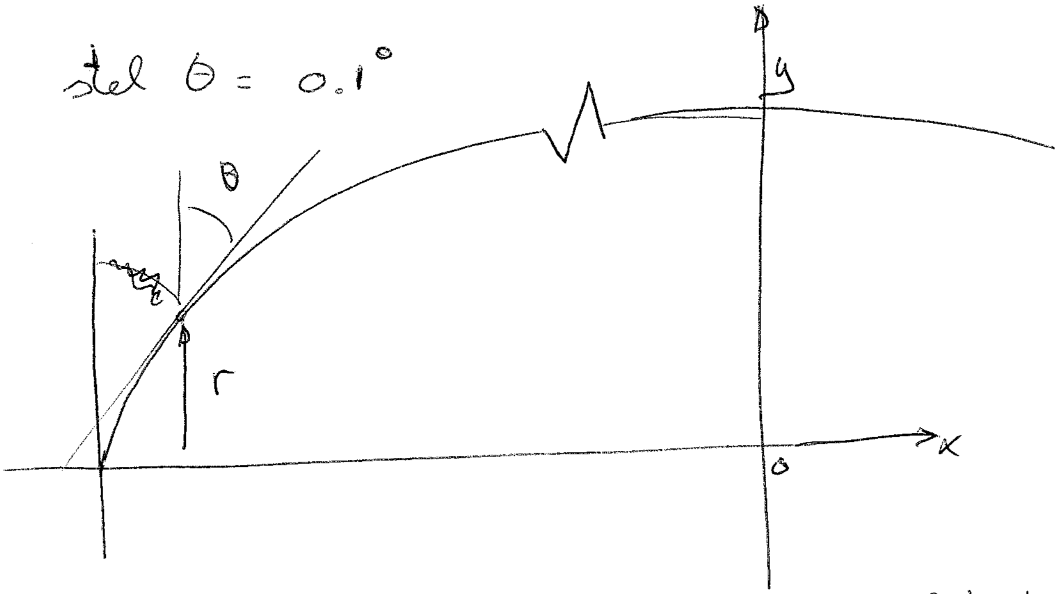
$R_e \approx 6400$ km

vergelijking ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

a = halve lange as
b = halve korte as



stel $\theta = 0.1^\circ$



Via de vergelijking van de ellips volgt dan dat
$r = 832$ m

Is nu $\Omega^2 r \cos\theta > g \cos(90^\circ - \theta)$?

$0{,}0917 > 0{,}0172$ ja

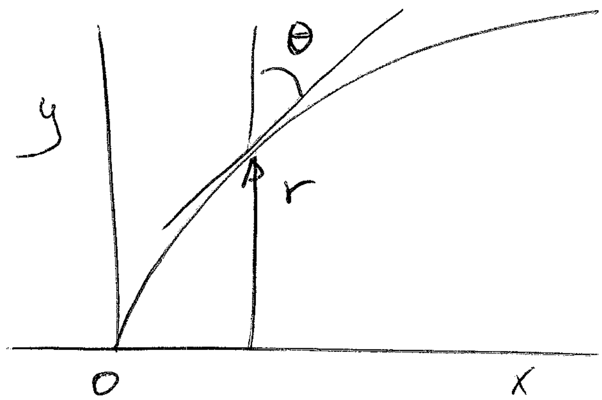
Wat is het begin punt van bewegen?
Dan moet je zoeken wanneer geldt $\Omega^2 r \cos\theta = g \cos(90^\circ - \theta)$

Wat goniometrie levert

$$\Omega^2 r \cos\theta = g \sin\theta$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\Omega^2 r}{g}$$

Nu zijn θ en r aan elkaar gekoppeld door de geometrie van de ellips



Voor een ellip geldt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

met in ons geval $y = r$

en $\tan\theta = \frac{dx}{dy}$

$$x = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-\frac{ay}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} = \frac{-ay}{b^2\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\theta}{r} = \frac{\Omega^2}{g}$$

$$\Rightarrow \frac{-ay}{b^2\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} = \frac{\Omega^2}{g} \quad \text{of ook} \quad \frac{-ar}{b^2\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} = \frac{\Omega^2}{g}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-ar}{b^2\sqrt{1-\frac{r^2}{b^2}}} = \frac{\Omega^2}{g}$$

De onbekende in deze vergelijking is r

$$\Rightarrow \quad -\frac{ar}{b^2} = \frac{\Omega^2}{g}\sqrt{1-\frac{r^2}{b^2}}$$

links en rechts kwadrateren

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2r^2}{b^4} = \frac{\Omega^4}{g^2}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{b^2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2r^2}{b^4} = \frac{\Omega^4}{g^2}\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad r^2\left(\frac{a^2}{b^4} + \frac{\Omega^4}{g^2}\frac{1}{b^2}\right) = \frac{\Omega^4}{g^2}$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{\Omega^2/g}{\sqrt{\frac{a^2}{b^4} + \frac{\Omega^4}{g^2}\cdot\frac{1}{b^2}}}$$

Invullen van de gekozen gegevens

$a = 3.25\ Re$

$b = 0,$[illegible]$5\ Re$

$\Omega = 0,0105\ rad/s$

$g = 9.81\ m/s^2$

$$\Rightarrow r = \frac{1.12 \cdot 10^{-5} * Re}{\sqrt{\frac{3.25^2}{0.5^4} + 1.12 \cdot 10^{-5} \times \frac{1}{0.5^2}}} = \frac{1.12 \cdot 10^{-5} Re}{13}$$

$$= 6.63 \cdot 10^{-8} Re = 0{,}42 \text{ m}$$

Dus bij een uitwijking van 42 cm zou hij moeten gaan bewegen. Dit wel onder allerlei aannames (wrijvingsloos, geen lucht-weerstand e.d.)

Blijft wel de vraag hoe het zit met energie. De klimmer gaat draaien op een steeds grotere straal en krijgt dus steeds meer kinetische energie. Die moet ergens vandaan komen. Dat kan in dit geval alleen maar als de ellips zelf wat vertraagt

Joris Melkert

06-49634441 voor verdere vragen.

Loop wel alles even goed na want ik geef geen garantie dat er geen stomme fouten in staan